

Kosmický výtah v příkladech

Zdeněk Bochníček

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

Geostacionární dráha

dráha, na které družice zůstává na stejném místě nad zemským povrchem.

Úhlová rychlost rotace družice je stejná, jako úhlová rotace Země,

Klasická úloha SŠ fyziky

Na GO je úhlová rychlost ω jakéhokoli satelitu stejná jako úhlová rychlost otáčení Země. Na jakékoli kruhové oběžné dráze se gravitační síla rovná dostředivé síle, což znamená, že

$$\kappa \frac{M_Z m}{R^2} = m \omega^2 R$$

po úpravě

$$R = \sqrt[3]{\frac{\kappa M_Z}{\omega^2}}.$$

po dosazení číselných hodnot

$$R = \sqrt[3]{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}}{(7,27 \cdot 10^{-5})^2}} = 42200 \text{ km}$$

výška nad povrchem Země se rovná

$$h = R - R_Z = 42200 - 6400 = 35800 \text{ km}$$

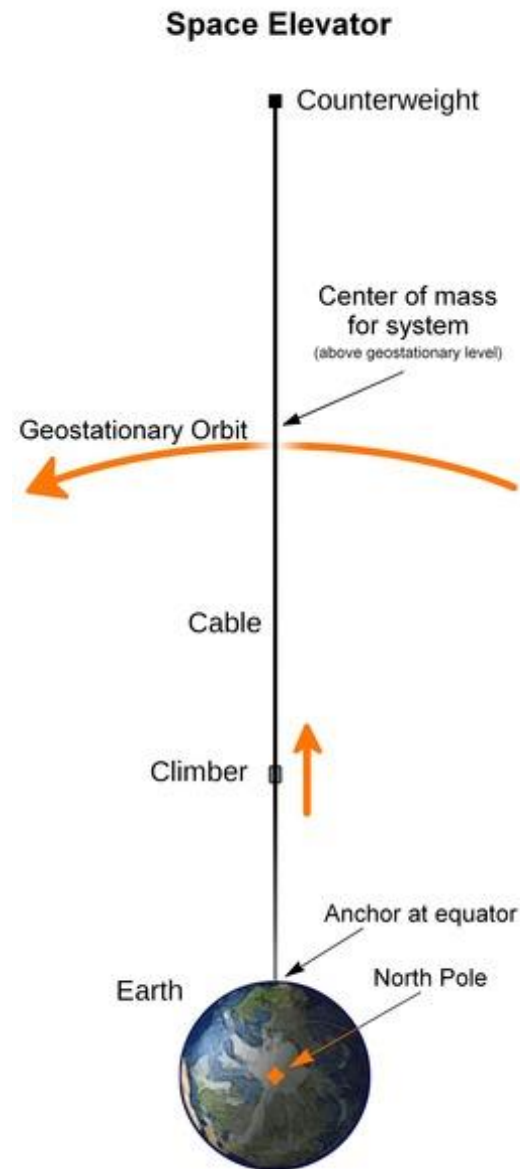
Existence geostacionární dráhy umožňuje hypotetickou konstrukci kosmického výtahu.

První nápad byl od Konstatina Ciolkovského (1895)

Věž postavené na rovníku, která by sahala
až na geostacionární dráhu



V roce 1959 přišel Jurii Artsutanov s alternativní myšlenkou spustit z geostacionární dráhy dlouhé lano, které by bylo vyváжено protizávažím nad geostacionární drahou.



1979 Arthur Clarke Rajské fontány

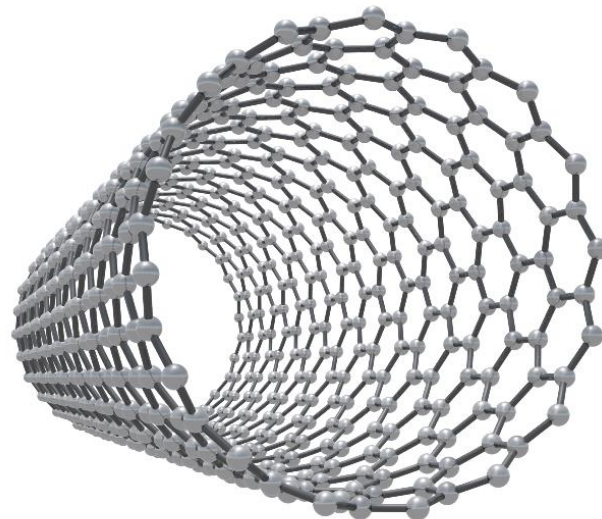
Konstrukce kosmického výtahu

Lano z uhlíku

V té době nebyl k dispozici žádný materiál, který by unesl vlastní tíži v takové délce a navíc by unesl i kosmický výtah.

90. léta 20. století –uhlíkové nanotrubičky – svinutý grafen.

Uhlík- lehký atom s pevnou kovalentní vazbou.



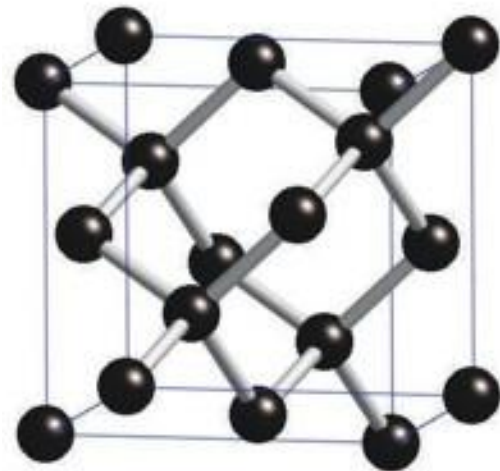
Uhlíkové nanotrubičky by mohly tvořit lano pro kosmický výtah

Chemická vazba v grafenu je pevnější než v diamantu

Grafen, hybridizace sp^2 , vazebná energie 4,93eV



Diamant, hybridizace sp^3 , vazebná energie 3,65eV



V příspěvku je popsáno a vyřešeno osm příkladů týkajících se fyziky kosmického výtahu.

Dva jsou využitelné na střední škole, zbylé vyžadují matematickou a fyzikální úroveň vysoké školy.

Příklad 1 (SŠ)

Jaká je maximální délka ocelového lana, které se pod vlivem gravitace neroztrhne? Lze použít aproximaci homogenního gravitačního pole?

Řešení

Předpokládejme lano o délce l a průřezu S . Největší napětí působí v nejvyšším bodě lana, kde musí lano odolat gravitační síle působící na celou délku lana visícího dolů. V aproximaci homogenního gravitačního pole dostaneme:

$$\begin{aligned}mg &= \sigma_{\max} S \\ S \cdot l_{\max} \rho g &= \sigma_{\max} S \\ l_{\max} &= \frac{\sigma_{\max}}{\rho g}\end{aligned}$$

kde m je hmotnost lana, $\sigma_{\max}$ je mez pevnosti oceli a ρ je hustota oceli. Dosadíme-li hodnotu extrémní vysokopevnostní oceli $\sigma_{\max} = 2 \text{ GPa}$ a $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, dostaneme

$$l_{\max} = \frac{2 \cdot 10^9}{7800 \cdot 10} \div 25 \text{ km}$$

Aproximace homogenního gravitačního pole je oprávněná.

Příklad 2 (VŠ)

Maximální délku lana můžeme zvětšit použitím nerovnoměrného průřezu lana. Je zřejmé, že největší průřez musí být v horní části lana. Jak se musí měnit poloměr lana podél jeho délky, aby zůstalo napětí konstantní? Předpokládejme, že gravitační pole je homogenní.

Řešení

Každé zvětšení délky lana musí být kompenzováno zvětšením jeho poloměru tak, aby nárůst gravitační síly působící na visící lano nezměnil napětí v laně. To znamená, že

$$gdm = \sigma dS$$

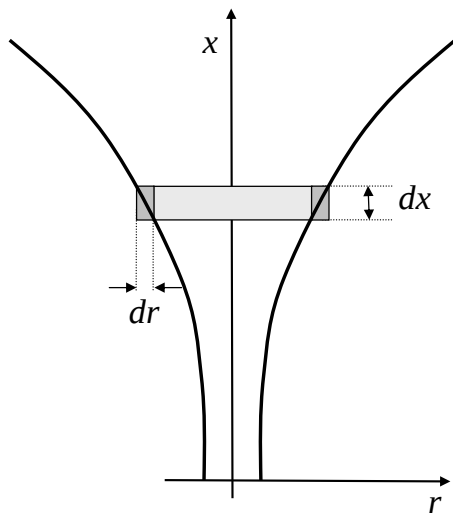
Přímočarým postupem se dostaneme k diferenciální rovnici

$$g\rho\pi r^2 dx = \sigma 2\pi r dr$$

$$g\rho r dx = \sigma 2 dr.$$

Jejíž řešení je

$$r = r_o e^{\frac{\rho g}{2\sigma} x}$$



Příklad 3 (VŠ)

Ověřte výsledek předchozího příkladu. Ukažte, že v laně s exponenciálně se zvětšujícím průměrem zůstává napětí po celé délce konstantní.

Příklad 4 (VŠ)

Jaká je maximální délka ocelového lana, které unese výtah o hmotnosti $M = 10\,000\text{ kg}$? Předpokládejme, že poloměr lana se může zvětšit maximálně desetinásobně. Jaký musí být poloměr v dolní a horní části?

Řešení

Poloměr v dolní části musí být 4mm, tedy v horní části 40mm

Toto vede k hodnotě maximální délky lana 120km

Příklad 5 (SŠ)

Určete výšku geostacionární oběžné dráhy (GO).

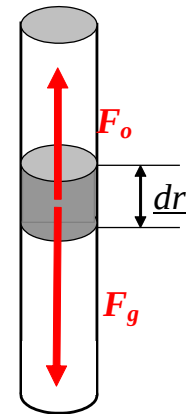
Viz dříve

Příklad 6 (VŠ)

Určete výslednou sílu působící na homogenní svislé lano o průřezu S a délce L , vyrobené z materiálu o hustotě ρ (v radiálním gravitačním poli).

$$dF_g = S \cdot dr \rho \cdot \kappa \frac{M_z}{r^2}$$

$$dF_o = -S \cdot dr \rho \cdot r \omega^2,$$



Příklad 7 (VŠ)

Předpokládejme, že vesmírný výtah je tvořen jediným homogenním svislým lanem bez protizávaží. Jak dlouhé musí být lano, aby volně viselo?

Řešení

148 000km

Příklad 8 (VŠ)

V jaké vzdálenosti od středu Země je lano vystaveno maximálnímu napětí?

Řešení

Na geostacionární dráze

Kosmický výtah je zajímavou alternativou cestování do vesmíru. Nelze však očekávat, že by byl v blízké budoucnosti realizovaný, Nejde jen o technické obtíže s tím spojené. Jde také o to, že praktický význam kosmického výtahu je velmi omezený. Může vynést družici na geostacionární dráhu, a tam je jednoduše vypustit. Ale pro nízké oběžné dráhy, které jsou využívány nejčastěji, nepřináší zásadní výhodu. Obvodová rychlost, kterou by kosmický výtah na nízké oběžné dráze zajistil, je velmi vzdálená od potřebné oběžné rychlosti.

Energetická bilance

Mechanické energie družice na kruhové oběžné dráze ve výšce 300km
(vztaženo na 1kg)

$$E = mgh + \frac{1}{2}mv_1^2 = 1 \cdot 10 \cdot 300000 + \frac{1}{2} 1 \cdot 7900^2 = (3 \cdot 10^6 + 31 \cdot 10^6) \text{J}$$

Mechanické energie družice vynesené kosmickým výtahem do výše
300km (vztaženo na 1kg)

$$E = mgh + \frac{1}{2}m(\omega r)^2 = 1 \cdot 10 \cdot 300000 + \frac{1}{2} 1 \cdot (73 \cdot 10^{-6} \cdot 6700000)^2 = (3 \cdot 10^6 + 0,12 \cdot 10^6) \text{J}$$

Děkuji za pozornost